Формальные модели программ

λ-исчисление как формальная система. Парадокс Клини-Россера: Тьюринг-полные системы противоречивы

Теория типов: первый шаг (от Principia Mathematica) до λ-исчисления с простыми типами

Соответствие Карри-Говарда: программа = доказательство утверждения (интуиционистская логика)

Основные свойства типизированного λ-исчисления

maxim.krivchikov@gmail.com

Материалы курса: https://maxxk.github.io/formal-models-2015/

По следам наших публикаций

Из большого результата иногда можно выделить не менее важный меньший результат

Конечный автомат — более простая модель, чем машина Тьюринга, был описан в 1943 году — через 7 лет после публикации Тьюринга (и без связи с ним)!

Направление дальнейшего изучения

Model checking позволяет доказывать *низкоуровневые* свойства. Наша задача — научиться доказывать свойства высокоуровневые; двигаться между уровнями абстракции, сохраняя справедливость доказательств.

В этом нам поможет современная **интуиционистская теория типов,** к которой мы будем подходить со стороны типизированного λ-исчисления.

Нетипизированное λ-исчисление Чёрча (1932)

Рассмотрим формулы, составленные из выражений вида:

1. $\lambda x.\, F$ — абстракция (x — имя переменной, которая может встречаться в формуле F)
2. $x, y, z, \ldots$ — переменная
3. $A \cdot B$ — приложение (аппликация), A, B — формулы.

Введём правило переписывания (β-редукция):

$$(\lambda x.\, F) \cdot G \longrightarrow_{\beta} F[G/x]$$

Буква α зарезервирована для понятия α-эквивалентности — формулы, эквивалентные с точностью до переименования переменных.

Вычисление считается завершённым когда нет β-редексов (подформул, к которым применима β-редукция)

Оригинальная формулировка Чёрча

A SET OF POSTULATES FOR THE FOUNDATION OF LOGIC.[1]

BY ALONZO CHURCH.[2]

1. **Introduction.** In this paper we present a set of postulates for the foundation of formal logic, in which we avoid use of the free, or real, variable, and in which we introduce a certain restriction on the law of excluded middle as a means of avoiding the paradoxes connected with the mathematics of the transfinite.

Church A. A Set of Postulates for the Foundation of Logic // The Annals of Mathematics. 1932. Vol. 33, № 2. P. 346–366.

5. **Undefined terms.** We are now ready to set down a list of the undefined terms of our formal logic. They are as follows:

$$\{\ \}(\ ),\quad \lambda\,[\ ],\quad \Pi,\quad \Sigma,\quad \&,\quad \sim,\quad \iota,\quad A.$$

Оригинальная формулировка Чёрча

{ } ( )
: аппликация (чтобы проще выделять левую и правую части)

λ []
: абстракция

Π(F, G)
: **G**(x) выполняется для всех значений, для которых выполняетсы **F**(x)

Σ(F)
: существует значение *x*, для которого верно **F**(*x*)

&
: конъюнкция

~
: отрицание (¬)

***ι* (F)**
: такое x, что F(x) верно

A(F, M)
: «абстракция M относительно F», дизъюнкция, используется для определения классов в стиле Principia Mathematica

Комбинаторная логика

M. Schönfinkel (1924), H. Curry (1930)

Формальная система, синтаксис которой состоит из переменных, парных скобок и *комбинаторов* (правил преобразования строк символов). Эквивалентна машине Тьюринга, близко связана с λ-исчислением.

- **S** x y z = x z (y z) — распределение
- **K** x y = x — отмена
- (**S, K** — базис, из них можно получить остальные комбинаторы)
- **I** x = x — идентичность
- **C** x y z = x z y — перестановка
- **B** x y z = x (y z) — композиция
- **W** x y = x y y — копирование
- **Y** x = x (**Y** x) — неподвижная точка

Y-комбинатор — примитивный комбинатор рекурсии. Если вместо переменных использовать λ-абстракцию и арифметические выражения, наивная реализация факториала могла бы выглядеть так:

```
Fact := Y (λ fact. λ x.
    if (x == 0) return 1
    else return x*fact(x - 1))
```

Парадокс Карри

1935 (Клини, Россер), 1941 (Карри), 1942 (Карри)

Если дана формальная система, удовлетворяющая следующим свойствам:

- конечное число примитивных термов, единственная операция — бинарная операция приложения, единственный унарный предикат — предикат выводимости «$\vdash A$»
- определено равенство в терминах примитивного терма Q и приложения ($X = Y \equiv\ \vdash Q\ X\ Y$)
- равенство симметрично, транзитивно, сохраняется при аппликации и подразумевает взаимную выводимость ($A = B \wedge \vdash A \Longrightarrow\ \vdash B$)
- для любого терма M со свободными переменными $X_1, \ldots, X_n$ существует терм M^*, такой, что $M^* \cdot X_1 \cdot \ldots \cdot X_n = M$
- может быть определён оператор импликации $\supset$, такой, что для любых термов M, N:
    - $\vdash M \supset M$
    - $\vdash M \supset (M \supset N) \Longrightarrow\ \vdash M \supset N$
    - $\vdash M$ и $\vdash M \supset N \Longrightarrow\ \vdash N$

Парадокс Карри

...то любой терм B выводим с помощью следующего построения:

1. Для любого A, если $A = A \supset B \Longrightarrow \vdash B$ (лемма)
2. $N \equiv \lambda X \,.\, X \supset B$
3. $R \equiv \lambda Y \,.\, N\,(Y \cdot Y)$
4. $A \equiv R\,R$ ($= N(R\,R) = N\,A = A \supset B$ и B выводимо)

П.1 — «плохой» терм.

Основная идея — если формальная система допускает неограниченный оператор рекурсии, то она противоречива. Это справедливо для любой формальной системы, эквивалентной комбинаторной логике или λ-исчислению.

Principia Mathematica

B. Russel, A. Whitehead. 1910 – 1913 (3 тома).
— фундаментальный труд по формализованным основаниям математики.

В книгах используется слегка отличающаяся от современной логическая нотация, но в целом их достаточно легко понять.
Авторы (до результатов Гёделя) пытались описать математику с позиций формализма и в этом преуспели.

Для того, чтобы преодолеть парадокс Рассела, предлагалось рассматривать объекты как принадлежащие к некоторым *типам*. Типы определяются как область истинности некоторого утверждения.

При изучении функций комплексного переменного, мы не пытаемся подставить вместо аргумента, например, бесконечномерный оператор. Все утверждения формируются с подразумеваемым условием «x — комплексное число».
Типы позволяют избавиться от циклических определений.

λ-исчисление с простыми типами

1940 (Чёрч); далее представлено определение, ближе к современной записи.
http://plato.stanford.edu/entries/type-theory-church/

Пусть дано множество базовых типов
B, * ∈ B

Допустимые типы:
$\tau \equiv b \mid \tau_1 \to \tau_2, \qquad b \in B.$

Стрелка — правоассоциативна:
$\alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$

Сокращение: $\alpha' \equiv \alpha \to \alpha$

- * — «тип типов», тип высказываний
- У Чёрча — в обратном порядке и без стрелок ($\alpha \to \beta \to \gamma \equiv (\gamma\beta\alpha)$)

Формулы:

- Символы λ, [,] для описания абстракции
- Переменные a_α, b_α, … типа α
- Логические константы :
  - $\neg_{*\to*}$ отрицание
  - $\vee_{*\to*\to*}$ дизъюнкция,
  - $\Pi_{(\alpha\to*)\to*}$ универсальная квантификация,
  - $i_{(\alpha\to*)\to\alpha}$ оператор выбора
- Константы произвольных типов α

Современная формулировка исчисления (только вычислительная часть) не содержит логических констант и типа * (точнее, * — это «тип всех типов», но не входит в константу τ)

λ-исчисление с простыми типами

Грамматика:

- Абстракция (записывается как $\lambda x_\alpha[A_\alpha]$)
- Приложение
- Константы и переменные

У Чёрча индексы типов обязательны, но мы будем их пропускать, если это уместно и использовать отношение типизации.

Отношение типизации

Окружение типизации Γ — конечный набор высказываний $x : \alpha$ (x имеет тип α), где x — символ переменной, а α — тип.
[] — пустое окружение, $x : \alpha \in \Gamma$ записывается как суждение $\Gamma \vdash x : \alpha$ (из окружения выводимо, что x имеет тип α).
$\Gamma, x : \alpha$ — окружение Γ, расширенное суждением $x : \alpha$.

Расширенная грамматика и правила вывода исчисления задаются в терминах таких суждений — правил типизации (и известного нам правила β-редукции)

- $\dfrac{c_\alpha \text{— константа типа } \alpha}{\Gamma \vdash c : \alpha}$, включая логические константы, если мы их рассматриваем
- $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau}{\lambda x_\sigma . e : \sigma \to \tau}$, обычно абстракция записывается как $\lambda x : \sigma . e$
- $\dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma \to \tau, \qquad \Gamma \vdash y : \sigma}{\Gamma \vdash x_{\sigma\to\tau} \cdot y_\sigma : \tau}$

Допустимы только типизируемые формулы, т.е. те, для которых из данного окружения можно вывести тип.

окружения можно вывести так.

Аксиомы и правила вывода

$$\mathbf{(\lambda x.\, F) \cdot G \longrightarrow_{\beta} F[G/x]}$$

β-редукция

Если используются логические константы, то импликация, как в алгебре логики $A_o \supset B_o \equiv (\neg A) \vee B$ и Modus Ponens (A ⊃ B, A $\Longrightarrow$ B)

1. $[p_* \vee p_*] \supset p_*$
2. $p_* \supset [p_* \vee q_*]$
3. $[p_* \vee q_*] \supset [q_* \vee p_*]$
4. $[p_* \supset q_*] \supset [[r_* \vee p_*] \supset [r_* \vee q_*]\ ]$

   (5^{α}) $\Pi_{(\alpha\to *)\to *}\ f_{\alpha\to *} \supset f_{\alpha\to *}\ x_{\alpha}$

   (6^{α}) $\forall x_{\alpha}[p_* \vee f_{\alpha\to *}x_{\alpha}] \supset [p_* \vee \Pi f_{\alpha\to *}]$

   (и еще несколько аксиом в оригинале)

Естественная дедукция

$$\tau \equiv \mathrm{b} \mid \alpha \to \beta$$

Правила типизации, используемые для определения типов, можно структурировать (следующая структура носит название «естественная дедукция», natural deduction):

формация (Formation) — как определяется конструктор типа

$$\left.\frac{\alpha, \beta \text{ — типы}}{\alpha \to \beta \text{ — тип}}\right|$$

введение (Introduction) — как определяются элементы типа

$$\left.\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau}{\lambda x_\sigma .\, e : \sigma \to \tau}\right|$$

удаление (Elimination) — что можно делать с элементами типа

$$\left.\frac{\Gamma \vdash x : \sigma \to \tau, \qquad \Gamma \vdash y : \sigma}{\Gamma \vdash x_{\sigma\to\tau} \cdot y_\sigma : \tau}\right|, \ x| \text{ — удаляемый терм}$$

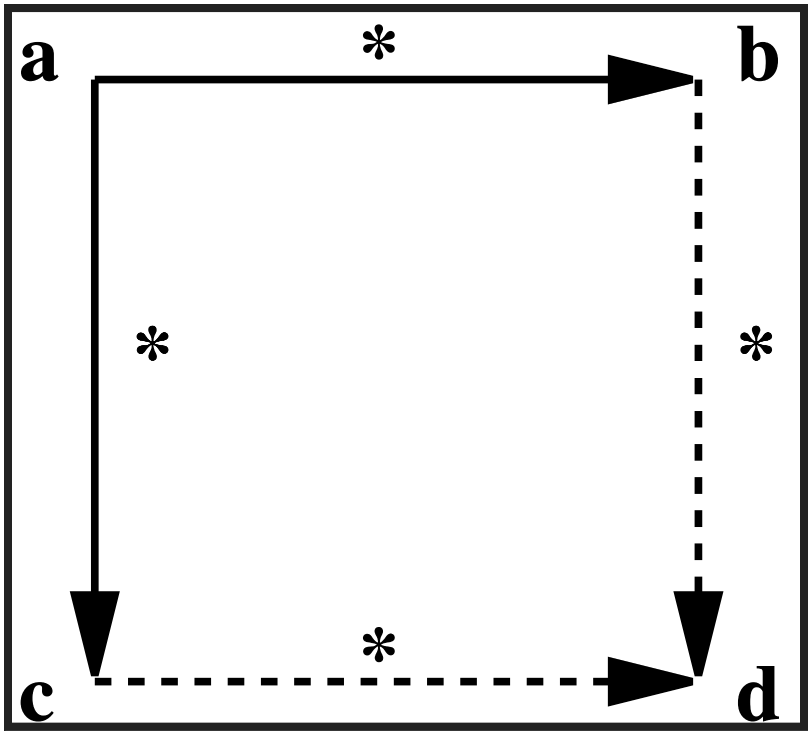
редукция (Reduction) — взаимное уничтожение термов введения и удаления (не входит в обычное понятие естественной дедукции)

$$\left.\underbrace{\overbrace{(\lambda x.\, F)}^{\text{введение}}\cdot G} \longrightarrow_\beta F[G/x]\right|$$

удаление

Свойства типизированного λ-исчисления

- сохранение типизации правилами редукции ($x : \alpha \longrightarrow y : \alpha$)
- теорема Чёрча-Россера: β-редукция конфлюэнтна
  правила редукции можно применять в разном порядке (λ x . \overbrace{f · (\underbrace{g · x}))})
  если $x \longrightarrow y$ и $x \longrightarrow z$ с помощью разной последовательности применения правил редукции, то существует терм w, для которого $y \longrightarrow w$ и $z \longrightarrow w$
  «свойство ромба»



Нормализация

Редекс — терм удаления, для которого есть правило редукции.
Нормальная форма терма относительно редукции — это такой вид, при котором к нему неприменимы правила редукции.
Головная нормальная форма терма — если в головной позиции (корне дерева) не стоит редекс.

Нормализация — свойство формальной системы: если у терма есть нормальная форма, то она единственная.
Сильная нормализация — у всех термов есть единственная нормальная форма (= нет термов, редукция которых не завершается).

Сильная нормализация для просто типизированного λ-исчисления

Просто типизированное λ-исчисление обладает свойством сильной типизации. Доказательство такого свойства выполняется с помощью моделей —

Эквивалентность термов

Обычно определяется следующим образом: A эквивалентен B, если A и B приводятся β-редукцией к идентичному виду, с точностью до корректных (не меняющих) переименований переменных. На индексах де Брёйна последнее замечание неактуально.

η-эквивалентность

Пусть $f : \alpha \to \beta$. Тогда $\lambda(x : \alpha). f \cdot x$ интуитивно эквивалентен исходной f, но по указанному выше определению формально это разные термы.

η-эквивалентность включает такое понятие и, в случае просто типизированного λ-исчисления, не нарушает разрешимости эквивалентности типов.

Проверка типов разрешима — если есть алгоритм, который для любого терма определяет, корректно ли он типизирован.
Эквивалентность термов разрешима — если есть алгоритм, который для любой пары термов определяет, эквивалентны ли они при заданных правилах.

Соответствие Карри-Говарда для просто типизированного λ-исчисления

Типы — импликативные суждения. Доказательства — термы, имеющие этот вид. Если ввести тип ложных высказываний как базовый тип False без правил введения и с правилом удаления ex falso, можно ввести и отрицание — «не α» ≡ α → False.

Двусторонняя проверка типов

Алгоритм проверки типов.

Достаточны аннотации типов у констант и переменных абстракции, остальные — можно вывести.

Две взаимно-рекурсивные функции — `check` и `infer`.

`infer` выводит тип терма, `check` проверяет, что терм имеет заданный тип.

Опциональные аннотации.

Не все утверждения удобно представимы в λ-исчислении с простыми типами

В частности, для нумералов Чёрча представимый класс называется «расширенные полиномы» над $\mathbb{N}$:

- 0, 1, проекции
- сложение, умножение
- функция $\mathtt{ifzero}(n, m, p) = \mathtt{if}\ n = 0\ \mathtt{then}\ m\ \mathtt{else}\ p$

В следующий раз мы рассмотрим различные способы расширения набора типов и постараемся убрать разделение между типами и термами.

Задачи со звёздочкой

Задача 5.1** Реализовать алгоритм двусторонней проверки типов для λ-исчисления с простыми типами (синтаксис входных данных — на ваше усмотрение).

- бонусная * — добавить редукцию
- бонусная * — визуализация редукции

Задача 5.2* Реализовать нумералы Чёрча с операцией сложения.

- бонусная * — умножение
- бонусная * — нетривиальный пример расширенного полинома